

## HISTORIA Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: CUADRANDO EL CÍRCULO EN EL AULA

Uxío Pérez Rodríguez - *Universidade de Vigo*

María Álvarez Lires - *Universidade de Vigo*

Paulo Porta Martínez - *IB Arcebispo Xelmírez I*

*En este artículo se relata cómo se ha empleado el problema de la cuadratura del círculo en un aula de 2° de Bachillerato para, desde un enfoque competencial, despertar en el alumnado el interés por la historia de un problema matemático, así como para contribuir a la adquisición de destrezas en el trazado de construcciones gráficas y en el cálculo de las medidas de las líneas que las componen. Se realiza una breve introducción histórica al problema y se describen las actividades que se han llevado a cabo. Por último, se detallan los resultados obtenidos y se realiza una valoración de los mismos.*

**Palabras clave:** *Historia de las matemáticas, Cuadratura del Círculo, Competencias, Geometría, Dibujo Técnico.*

**Geometry's history and learning: squaring the circle in the classroom.**

*In this article it is described the way in which the problem of squaring the circle has been used in a classroom of the last course of the Spanish Secondary Education in order to arouse the interest of the students (through a point of view based on the competences of the pupils) about the history of a maths problem and moreover to contribute to the obtaining of skills in the drawing of graphic constructions and the calculation of the line measures which compose those constructions. It is made a brief historical introduction of the problem and then there are described the different actions which have been necessary to get the solution of the problem.*

**Keywords:** *History of Mathematics, Squaring of the Circle, Competences, Geometry, Technical Drawing*

## INTRODUCCIÓN

La relación de la historia del conocimiento humano con la enseñanza es un tema que ha despertado el interés de las comunidades de didáctica de las ciencias y las matemáticas (Izquierdo, 1996; Fernández, 2001; Pérez Rodríguez, Álvarez Lires y Porta Martínez, 2007). Estos enfoques consideran de utilidad la introducción de la historia de las disciplinas para propiciar la adquisición de conocimientos y competencias científicas y matemáticas, contribuir a la motivación del alumnado, formarlo en los aspectos más humanísticos de la construcción de la ciencia y, consecuentemente, avanzar en la disminución del fracaso escolar. No obstante, la introducción de los temas históricos en los niveles de Enseñanza Secundaria no está exenta de dificultades (Álvarez Lires, 1999).

Dado que en la actualidad existe una preocupación creciente sobre las relaciones entre la historia de las matemáticas y su enseñanza (Fernández, 2001), es lícito preguntarse qué aporta este enfoque en particular. En el contexto actual, como es sabido, una de las preocupaciones de las personas que se dedican a la enseñanza debería ser el trabajo por competencias. Sin embargo, una vez pasado el revuelo mediático desatado a raíz de la publicación de los resultados del informe PISA del año 2003, que no dejaron en buen lugar al sistema educativo español, no parece que esta manera de entender la enseñanza esté recibiendo toda la atención que debería (Muñoz, 2007). En consecuencia, si se emplea la historia de las matemáticas en el aula es preciso no olvidar que uno de los objetivos fundamentales que se deben tener en mente lo constituye la necesidad de trabajar por competencias.

En este artículo se relatará cómo, desde un enfoque competencial, se ha empleado en un aula de 2º de Bachillerato un famoso problema matemático histórico, el de la cuadratura del círculo (ver Cuadro 1). Para ello se ha llevado a cabo un conjunto de actividades graduadas de tal forma que al comienzo se fueron proporcionando las herramientas geométricas necesarias para analizar la precisión de cuadraturas cada vez más complejas y al final se solicitó al alumnado que se buscasen soluciones aproximadas al

problema. Con todo ello se pretendió por supuesto que se adquiriese destreza en el trazado de construcciones gráficas y en el cálculo de las medidas de las líneas que las componen, pero también se intentaba despertar en el alumnado el interés por la historia de un enigma matemático y, en última instancia, se perseguía desarrollar competencias útiles para enfrentarse a problemas.

### **Cuadro 1. El problema de la cuadratura del círculo**

Pocos problemas en la historia de las matemáticas han sido tan populares como el de la cuadratura, el cual se propuso en tiempos de la antigua Grecia y no fue resuelto hasta 1882, cuando Lindemann demostró que no tenía solución. Dado un círculo, el enunciado del enigma pide construir un cuadrado de igual área utilizando exclusivamente regla no graduada y compás, empleando para ello un número finito de pasos. Si se tiene un círculo de radio unitario es inmediato llegar a que el lado del cuadrado de igual área mide la raíz cuadrada de  $\pi$ , que es por tanto la medida de la línea que hay que ser capaz de trazar para cuadrar el círculo original.

A lo largo de la historia se propusieron muchas soluciones para el problema, de las cuales puede verse una amplia selección en la página web de Paulo Porta Martínez. Una de las personas que se entretuvieron buscando cuadraturas fue el ilustrado gallego Fray Martín Sarmiento (1695-1772) (Pérez Rodríguez, Álvarez Lires y Porta Martínez, 2006), quien dejó escritas excelentes soluciones aproximadas al problema, más precisas incluso que las de afamados pensadores como Arquímedes o Viète. En las actividades que se describen en este artículo se hizo uso de sus cuadraturas.

### **ACTIVIDADES REALIZADAS**

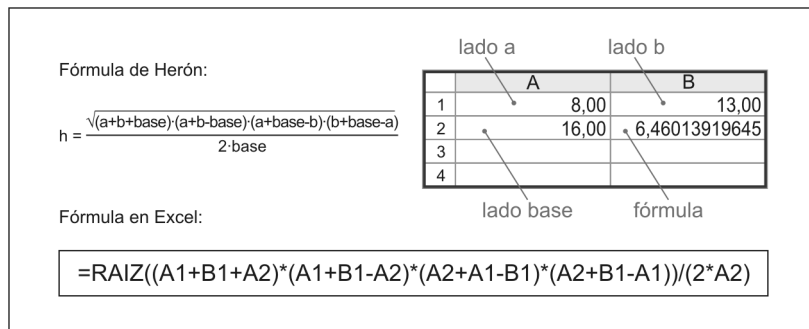
Como se ha anticipado, se llevaron a cabo diversas actividades (ver Tabla 1) con el tema común del problema de la cuadratura del círculo. Dado que la mayoría de los conocimientos y destrezas necesarios para hallar gráficamente soluciones aproximadas a este enigma están relacionados con contenidos incluidos al comienzo de la programación de Dibujo Técnico de 2º de Bachillerato, la experiencia tuvo lugar con alumnado de dicho curso y asignatura, concretamente del IB Arcebispo Xelmírez I (Santiago de Compostela), durante el primer trimestre del curso 2007/08. Con este conjunto de actividades se persiguió que el alumnado adquiriese destreza en el trazado de construcciones gráficas fundamentales y en el cálculo de las medidas de las líneas que las componen, a la vez que se buscó que estas personas se interesasen por la historia de un problema matemático. Asimismo, dado que esta experiencia se llevó a cabo en Galicia, se hizo uso de, entre otras, las cuadraturas del ilustrado gallego Martín Sarmiento (1695-1772), para que el alumnado conociera su figura y lo valioso de sus aportaciones.

En última instancia, estas actividades se diseñaron para buscar el desarrollo competencial del alumnado, lo cual implica pretender que éste sea capaz de enfrentarse a los problemas –contextualizados o no- con las herramientas matemáticas que posea. No se trata sólo de disponer de conocimientos matemáticos, sino de emplearlos para resolver un problema (Sol, Jiménez y Rosich, 2007), en este caso el de la cuadratura. Así, se secuenciaron las actividades de manera que en primer lugar se dedicó tiempo a proporcionar las herramientas geométricas necesarias para atacar el enigma, más tarde se analizó la precisión de cuadraturas cada vez más complejas y sólo durante la sesión final se pidió que se buscara una solución aproximada al problema.

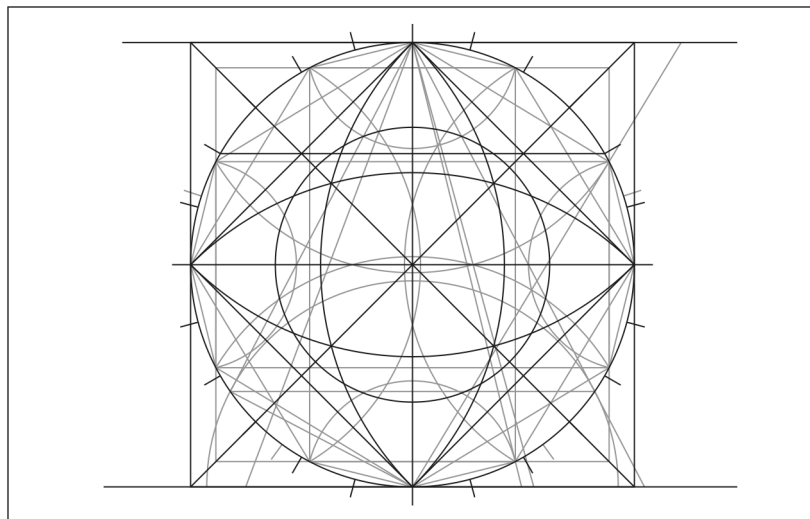
<p><b>Sesiones preparatorias: las herramientas geométricas necesarias para abordar la cuadratura</b></p>	<p>La primera unidad temática programada para 2° de Bachillerato en el instituto donde se realizó la experiencia incluía construcciones elementales de geometría plana como la suma y resta de segmentos y de ángulos, rectificación de la circunferencia, construcción de polígonos regulares... Otros conceptos útiles en el contexto que nos ocupa como pueden ser la sección aurea, las raíces de 2,3 y 5 y la media, tercera y cuarta proporcionales se trataban en una segunda unidad dedicada a la proporción y a las transformaciones en el plano. La estrategia consistió en aprovechar estos contenidos de la programación de manera que sirviesen como preparación del tema de la cuadratura, deteniéndose en los cálculos numéricos que implicaban las construcciones geométricas estudiadas, los cuales serían necesarios más adelante.</p> <p>En las clases se valoró cuantitativamente la exactitud de diversas soluciones aproximadas a varios problemas geométricos. Concretamente, se calculó la precisión de algunos métodos de rectificación de la circunferencia (Arquímedes, Mascheroni, Kochansky) y de construcción de polígonos regulares (heptágono, eneágono, métodos generales).</p> <p>Durante este periodo preparatorio, y ante la extrañeza mostrada por el alumnado por que el profesor insistiese tanto en reflexionar en términos matemáticos sobre los trazados geométricos, se adelantó que se estaba preparando el terreno para buscar soluciones aproximadas a un problema geométrico en clase.</p>
<p><b>Introducción del problema de la cuadratura y repaso de conceptos geométricos</b></p>	<p>Se explicó en qué consistía el problema de la cuadratura, y se hizo entrega de un cuadernillo con gráficos en el que se enumeraban los recursos geométricos que ayudarían a realizar los cálculos necesarios para buscar cuadraturas. Se repasaron estos conceptos. A continuación se mostraron diversas soluciones clásicas ilustradas con animaciones en flash de la página web de Paulo Porta Martínez.</p>

<p><b>Trazado y análisis de varias cuadraturas</b></p>	<p>Con la ayuda del profesor, el alumnado resolvió gráficamente dos cuadraturas no muy complejas pero que exigían una variedad de cálculos trigonométricos y proporcionales, la primera debida a Martín Sarmiento y que proporciona una solución con 7 decimales correctos del valor de <math>\pi</math> y la segunda ideada por el profesor con 5 decimales coincidentes. Las comprobaciones numéricas se realizaron con ayuda de la calculadora y en algunos casos con programas informáticos como Excel (ver Figura 1).</p> <p>La sesión terminó con la exposición de otra cuadratura de Sarmiento, de la cual se deduce un valor de <math>\pi</math> con 10 decimales correctos. El alumnado no realizó la construcción, sino que se describieron sus pasos y se realizaron las operaciones necesarias para cuantificar su precisión.</p>
<p><b>Búsqueda de una solución aproximada</b></p>	<p>Durante la última sesión el alumnado buscó sus propias construcciones. Dado lo limitado del tiempo, y para ahorrar trabajo mecánico, se proporcionaron hojas A3 (ver Figura 2) en las que con tinta negra estaba trazada la circunferencia de partida, así como unas cuantas líneas de fácil obtención (las cuerdas principales, divisiones cada 15 grados, arcos inmediatos, etc.). En tinta roja (gris en la Figura 2) aparecía el cuadrado buscado, y también cuerdas, arcos y otros trazados que llevan directamente a la solución teórica.</p> <p>Se propuso hacer una búsqueda gráfica, con regla y compás, siempre a partir de datos en negro, hasta conseguir que dos líneas se cruzasen de la forma más precisa posible sobre cualquiera de los trazos en rojo. Si se consiguiese un corte exacto se habría hallado la cuadratura.</p>

**Tabla 1. Actividades realizadas**



**Figura 1. Hoja de Excel para el cálculo de la altura de un triángulo sobre un lado base mediante la Fórmula de Herón**

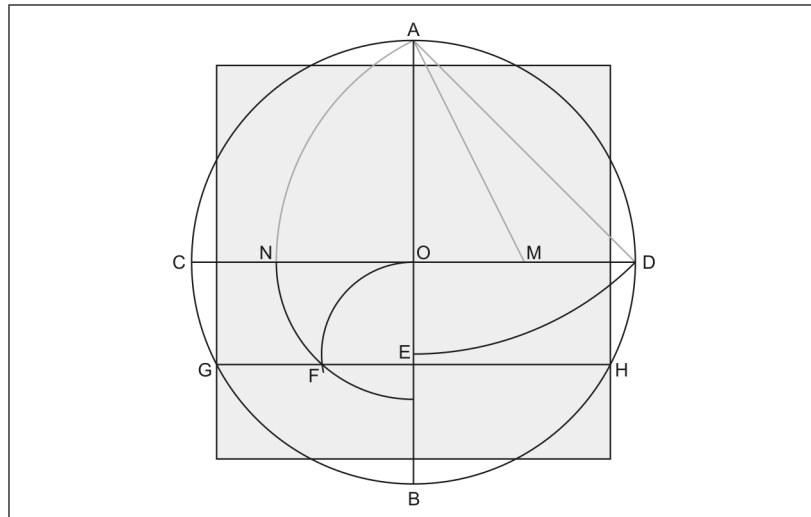


**Figura 2. Imagen sobre la que el alumnado debía buscar cuadraturas**

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Durante la búsqueda de cuadraturas aparecieron diversas soluciones aproximadas. En clase sólo hubo tiempo para comprobar la precisión de una de ellas (Figura 3), de la cual resultó derivarse un valor de  $\pi$  de 3'1496. Abatiendo sobre el diámetro la cuerda de 90° AD se encuentra el punto E, y llevando la medida EO hasta cortar el arco concéntrico a la circunferencia que tiene como radio la sección aurea se

halla el punto F. GH, línea paralela al diámetro que pasa por F, es el lado del cuadrado cuya área es casi equivalente a la del círculo dado. Otras de las soluciones encontradas en clase eran todavía más precisas.



**Figura 3. Una de las cuadraturas halladas en el aula**

Por tanto, con el método empleado se logró que se abordase el problema en el aula y se hallase una aproximación perfectamente utilizable en la práctica por su simplicidad y precisión. El alumnado, por otra parte, mostró cierto interés en las actividades, además de sorpresa por ver que con un poco más de preparación podría llegar a ser capaz de analizar la precisión de las construcciones más complejas. En clase resultó chocante que Sarmiento, sin disponer siquiera de una calculadora electrónica, fuera capaz de encontrar cuadraturas tan exactas.

Sin embargo, la metodología empleada no era la habitual a la que el alumnado estaba acostumbrado y en ocasiones habría sido preciso detenerse durante más tiempo en algunas de las actividades de mayor complejidad para obtener un mayor aprovechamiento de ellas. No obstante, esto no habría sido posible sin descuidar el resto de contenidos de la asignatura, y en el segundo curso de Bachillerato la espada de Damocles de las pruebas de acceso a la Universidad obliga en ocasiones a avanzar con mayor premura de la que sería deseable.



En cualquier caso, los resultados de la experiencia fueron positivos, y los recursos adquiridos para analizar numéricamente construcciones geométricas podrán ser de utilidad al alumnado en el futuro. Además, para las personas asistentes a las sesiones resultó un estímulo comprobar que se puede practicar la geometría de forma activa y creativa. En vista de todo ello, es posible concluir que puede merecer la pena potenciar este enfoque histórico y a la vez competencial en la enseñanza, y en este caso concreto probablemente sería aconsejable buscar un tratamiento común y coordinado entre, al menos, los departamentos de Dibujo y Matemáticas.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁLVAREZ LIRES, M. (1999): “The History of Science and Technology in Teacher Training”, en DEBRU, C. (ed.) History of Science and Technology in Education and Training in Europe. Brussels. European Commission DG RTD. Euroscientia Conferences.

FERNÁNDEZ, S (2001): “La historia de las matemáticas en el aula”, en Uno, Barcelona, 26, 9-28.

IZQUIERDO, M. (dir.) (1996): Col·lecció Ciències 12/16. Material Experimental. Barcelona. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Direcció General d'Ordenació Educativa.

MUÑOZ, J. (2007): “Competencias y uso social de las matemáticas”, en Uno, Barcelona, 46, 5-8.

PÉREZ RODRÍGUEZ, U.; ÁLVAREZ LIRES, M.; PORTA MARTÍNEZ, P. (2006): “Frei Martín Sarmiento e a cuadratura do círculo”, en El Museo de Pontevedra, Pontevedra, 60, en prensa.

PÉREZ RODRÍGUEZ, U.; ÁLVAREZ LIRES, M.; PORTA MARTÍNEZ, P. (2007): “La cuadratura del círculo en el aula de Dibujo Técnico”, en XX Congreso de ENCIGA, Santiago de Compostela, pp. 71-72.

SOL, M.; JIMÉNEZ, J.; ROSICH, N. (2007): “Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO”, en Uno, Barcelona, 46, 43-60.