Recursos xeométricos

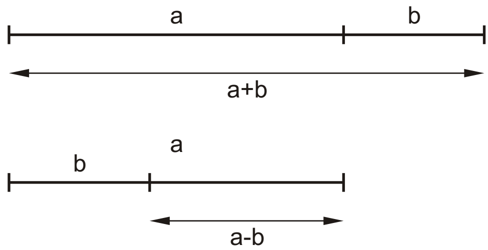
Para analisar e cuantificar os pasos da cuadratura, repasamos varios conceptos, fórmulas e teoremas da xeometría que ben seguro xa coñecerás.

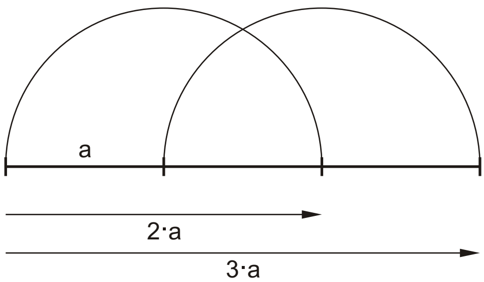
Suma e resta de segmentos

Os segmentos colócanse na mesma recta, cun extremo común.

Se non se superpoñen, os extremos non comúns definen un terceiro segmento igual á suma de ambos.

Se están superpostos, os extremos non comúns definen un terceiro segmento igual á súa diferencia.





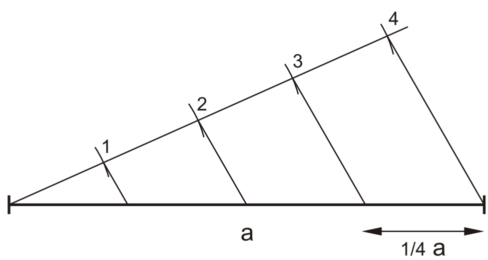
Multiplicación dun segmento por un número enteiro

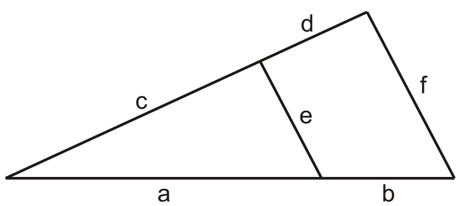
Transpórtase a medida do segmento sucesivas veces, co compás.

División dun segmento por un número enteiro

Resólvese co Teorema de Thales.

Para dividir un segmento en dúas metades, é máis breve trazar a mediatriz.





a/c = b/d = (a+b)/(c+d)
a/(a+b) = e/f

Razón entre segmentos

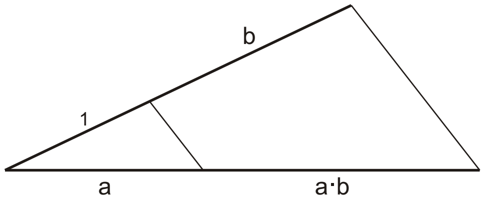
O Teorema de Thales e a semellanza de triángulos permiten comparar e igualar a razón (valor relativo) de distintos pares de segmentos.

Produto de segmentos

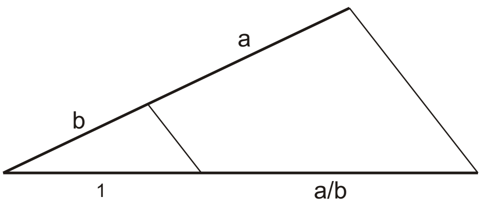
Para multiplicar dous segmentos hai que ter en conta a unidade.

Exemplo: dous segmentos miden 2 e 3 cm. Se a unidade é o centímetro, o seu produto é un segmento de valor 6 cm. Pero se a unidade é o milímetro, o seu produto é 20x30 = 600 mm.

O produto é a cuarta proporcional onde a unidade é o primeiro termo.



División de segmentos

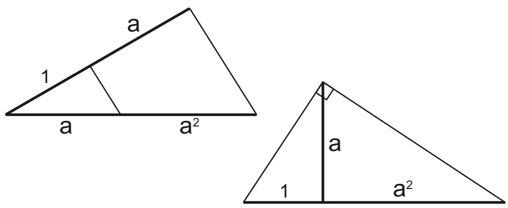


Como inverso do produto, a división é a cuarta proporcional onde o divisor é o primeiro termo, e o dividendo máis a unidade, os termos medios.

Cadrado dun segmento

Elevar un segmento ao cadrado equivale a multiplicalo por si mesmo.

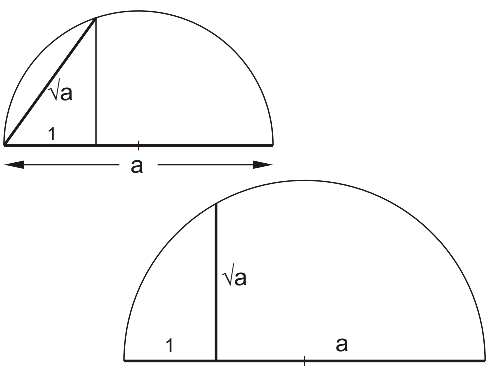
Pode calcularse por Teorema de Thales, ou mediante triángulos rectángulos.



Raiz cadrada dun segmento

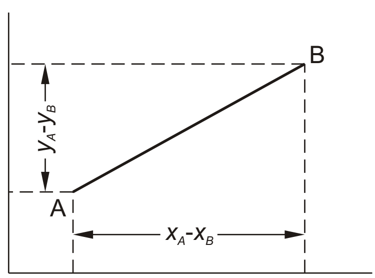
A Raiz cadrada dun valor é a súa media proporcional coa unidade.

Calcúlase cunha semicircunferencia de diámetro igual ao segmento (arriba) ou á suma do segmento e a unidade (abaixo)

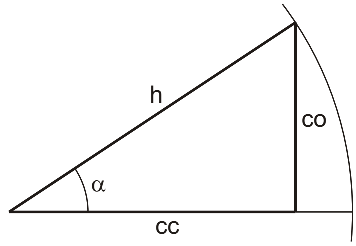


Medición de segmentos oblículos

Co Teorema de Pitágoras podemos calcular a lonxitude dun segmento coñecendo a diferencia horizontal e vertical dos seus extremos, ou tamén calcular unha destas se coñecemos a outra e a lonxitude



Razóns trigonométricas básicas

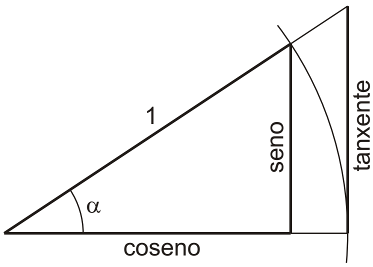


Nun triángulo rectángulo, están relacionadas cun ángulo contiguo á hipotenusa.

Seno: razón entre o cateto oposto e a hipotenusa: *co/h*

Coseno: razón entre o cateto contiguo e a hipotenusa: *cc/h*

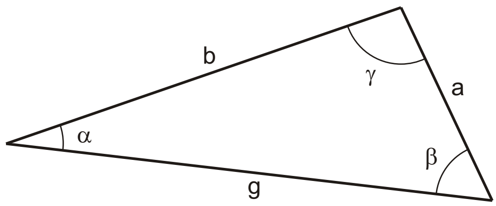
Tanxente: razón entre o cateto oposto e o cateto contiguo: *co/cc*



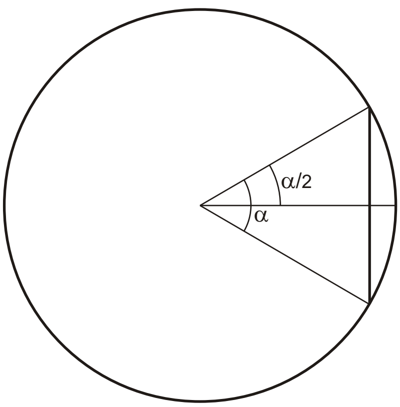
Nunha circunferencia de raio = 1, o valor seno é a lonxitude do cateto oposto, o coseno o do cateto contiguo, e a tanxente o do segmento de recta tanxente á circunferencia e perpendicular a un dos lados do ángulo, no que se proxecta o arco.

Teorema do seno

As lonxitudes dos lados dun triángulo son proporcionais aos senos dos ángulos opostos.



$a/sen\alpha = b/sen\beta = g/sen\gamma$



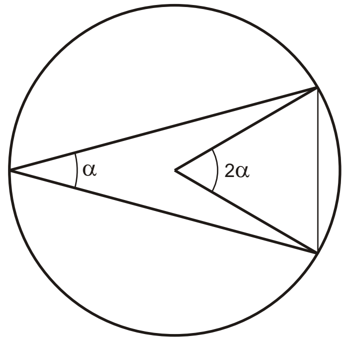
Corda e seno

Coa calculadora podemos saber o valor seno de calquera ángulo.

Para obter o valor da corda, divídese o ángulo por dous, calcúlase o seno e finalmente multiplícase por dous o resultado.

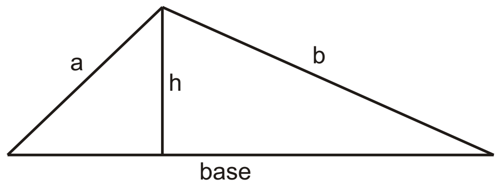
Ángulos central e inscrito

A abertura dun ángulo inscrito na circunferencia vale exactamente a metade da abertura do ángulo central que abarca a mesma corda e o mesmo arco.



Altura dun triángulo

Calcúlase a lonxitude da altura sobre un lado base, coñecidos éste e outros dous lados a e b, coa fórmula de Herón:



$$h = \frac{\sqrt{(a+b+base)\cdot(a+b-base)\cdot(a+base-b)\cdot(b+base-a)}}{2\cdot base}$$

lado a lado b

	A	B
1	8,00	13,00
2	16,00	6,46013919645
3		
4		

lado base fórmula

Calcular alturas

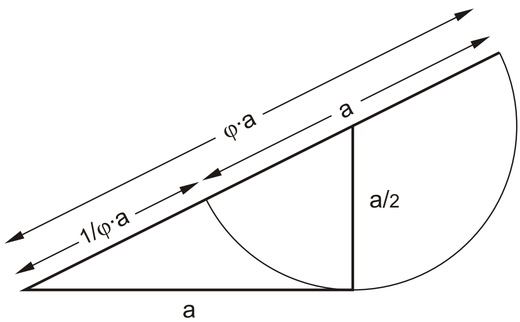
O máis cómodo para calcular a altura resultante cando variamos os lados do triángulo é crear unha folla de cálculo.

Neste exemplo, en Excel, colocamos nas casiñas A1, B1 e A2 as lonxitudes dos lados, e en B2 a seguinte fórmula:

```
=RAIZ((A1+B1+A2)*(A1+B1-A2)*(A2+A1-B1)*(A2+B1-A1))/(2*A2)
```

Razón áurea

Formando un triángulo rectángulo de catetos un valor *a* e a súa metade *a/*2, a diferencia entre a hipotenusa e o cateto menor é a sección áurea de *a*: $1/\varphi\cdot a$, mentras que a suma da hipotenusa e o cateto menor é a extensión áurea: $\varphi\cdot a$, cumpríndose que $\varphi\cdot a = a + 1/\varphi\cdot a$.



A sección áurea do raio é a corda de 36 graos, lado do decágono inscrito.

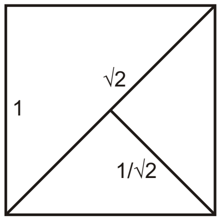
Operacións sinxelas

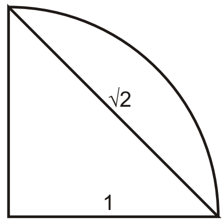
Algúns exemplos de magnitudes que podemos obter de maneira inmediata a partir de formas elementais como o cadrado e a circunferencia.

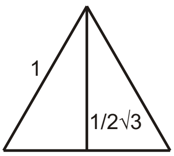
Raiz de 2

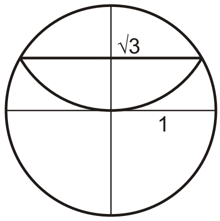
Nun cadrado de lado 1, a diagonal mide √2, e a semidiagonal 1/√2.

Nunha circunferencia de raio 1, √2 é a lonxitude da corda de 90 graos.









Raiz de 3

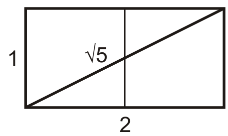
Nun triángulo equilátero de lado 1, a altura mide 1/2√3.

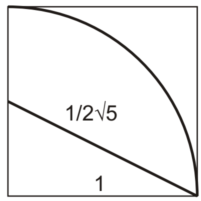
Nunha circunferencia de raio 1, √3 é a corda de 120 graos.

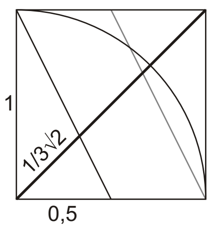
Raiz de 5

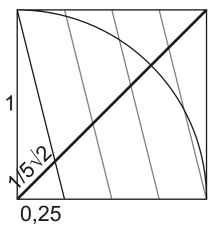
√5 é a diagonal dun rectángulo de lados 1 e 2.

Nunha circunferencia de raio 1, ½ √5 é a distancia entre o extremo dun raio e o punto medio doutro raio perpendicular.









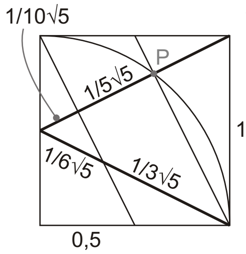
Fraccións de Raiz de 2

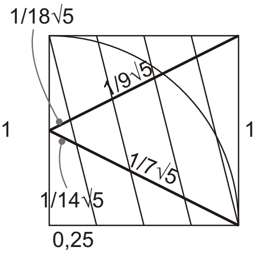
A partir da división da unidade, algúns cruces de rectas permiten obter fraccións sinxelas de √2, evitando o recurso ao Teorema de Thales.

Fraccións de Raiz de 5

Do mesmo xeito, podemos facer diferentes fraccións de √5.

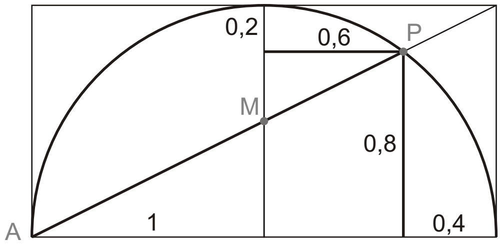
A coincidencia no punto P no gráfico, permite verificar as divisións da unidade que veñen a continuación.

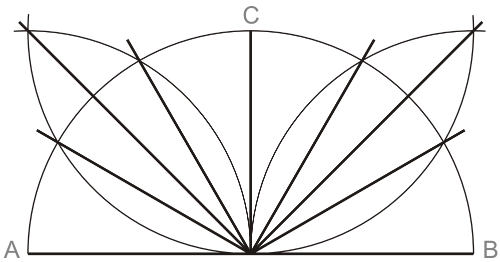




Fraccións sinxelas do raio

Trazando unha recta que pase polo extremo A dun raio e polo punto medio M do raio perpendicular, chegamos a un punto P na circunferencia, dende o que resulta inmediato obter un, dous, tres ou catro quintos do raio.



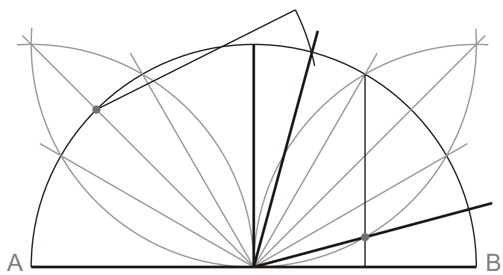


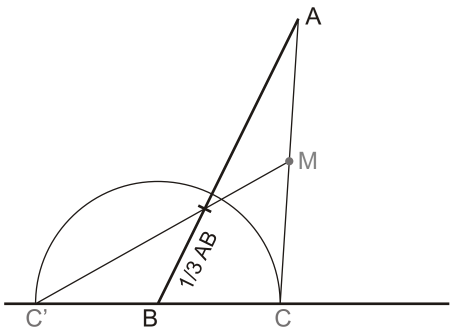
Ángulos principais

Trazando arcos co mesmo raio que a circunferencia, dende os extremos de diámetros perpendiculares, obtemos calquera ángulo múltiplo de 30º ou de 45º.

Tampouco é preciso recorrer ao trazado de bisectrices, para acadar, a partir deste esquema, o resto dos ángulos múltiplos de 15º.

Para isto empregamos arcos coa mesma apertura dende os extremos dos raios a 45º, ou as interseccións das cordas de 120º cos arcos.





Trisecar un segmento

En certas situacións, resulta cómodo unir o extremo A cun punto C dunha recta que pase por B, localizar o simétrico C’ respecto de B, o punto medio M de AC, e unir ambos os dous.